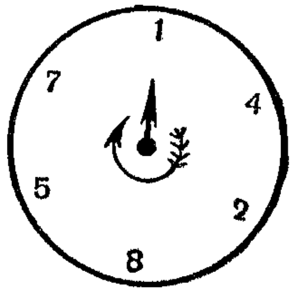
Р.Г. Щербина, студ. гр. *ФК-09-1,* Р.А. Топоров, студ. гр.. МЕ-09*,*
Л.Н. Кривоблоцкая, доц., канд. физ.-мат. наук
Кировоградский национальный технический университет

Числовая карусель

Вынимаю из бездонной числовой шкатулки число 142 857. Оно состоит из шести разных цифр. Расположим их по кругу в виде циферблата (см. рисунок). Умножим теперь данное число последовательно на 1, 2, 3, 4, 5 и 6:

$$142\,857 \times \begin{cases} 1 = 142\,857, \\ 2 = 285\,714, \\ 3 = 428\,571, \\ 4 = 571\,428, \\ 5 = 714\,285, \\ 6 = 857\,142. \end{cases}$$



Перемещаясь по циферблату вместе со стрелкой, мы прочтем любое из получившихся произведений.

Каждое число циферблата служит первой цифрой одного из результатов произведения. Настоящая числовая карусель, не правда ли?

Есть еще одно интересное свойство. Если любое из этих произведений рассечь на две грани по 3 цифры, а затем обе грани сложить, то во всех случаях результатом будет одно и тоже число: 999. В самом деле, 142+857=999, 285+714=999 и т.д.

Продолжим наши 6наблюдения над произведением числа 142 857 на целые числа, следующие за числом 7 (произведение на 7 рассмотрим позже):

$$142\,857 \times \begin{cases} 8 = 1\,142\,856 & (142\,856 + 1 = 142\,857), \\ 9 = 1\,285\,713 & (285\,713 + 1 = 285\,714), \\ 10 = 1\,428\,570 & \ldots\ldots\ldots \\ 11 = 1\,571\,427 & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 69 = 9\,857\,133 & (857\,133 + 9 = 857\,142). \end{cases}$$

Получаются семизначные числа, но тоже особенные: если зачеркнуть первую цифру и ее же прибавить к последней (см. равенства в круглых скобках), и снова получим одну из круговых перестановок числа 142 857.

Та же «карусель» из цифр числа 142 857 (за немногими исключениями) будет получаться и деле с восьмизначными результатами произведения, если только зачеркивать первые две цифры и прибавлять их к последним двум.

Произведение числа 142 857 на 7 резко отличается от остальных произведений. Оно состоит из одних девяток:

$$142\,857 \times 7 = 999\,999.$$

Вот это обстоятельство и проливает свет как на происхождение самого числа 142 857, так и на его «таинственные» свойства. Не будет ли оно периодом дроби $\frac{1}{7}$ при

обращении ее в десятичную? Делим 1 на 7:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 7 \\ \hline 10 & 0{,}142\,857 \\ \;\;30 & \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1 & \end{array}$$

Последний остаток повторил число 1, следовательно, при дальнейшем делении в частном будут повторяться те же цифры и в том же порядке. Это и есть периодическая дробь, то есть такая бесконечная дробь, в последовательности десятичных знаков которой обнаруживаются (начиная с некоторой цифры) повторения группы цифр.

Предположение оправдалось число 142 857 действительно является периодом дроби $\frac{1}{7}$ при обращении ее в десятичную. Чтобы уяснить, почему это число при умножении на 2, 3, 4, 5, 6 дает лишь круговую перестановку своих цифр, вернемся к действию деления 1 на 7. Весь процесс обращения дроби $\frac{1}{7}$ в десятичную можно расчленить на следующие этапы:

$$\frac{1}{7} = 0{,}1 + \frac{3}{7}\cdot 10^{-1} = 0{,}14 + \frac{2}{7}\cdot 10^{-2} = 0{,}142 + \frac{6}{7}\cdot 10^{-3} =$$
$$= 0{,}1428 + \frac{4}{7}\cdot 10^{-4} = 0{,}14285 + \frac{5}{7}\cdot 10^{-5} = 0{,}142857 +$$
$$+ \frac{1}{7}\cdot 10^{-6} = \ldots \text{ (дальше повторение тех же цифр).}$$

Отсюда ясно, что при обращении дроби $\frac{3}{7}$ в десятичную период начнется с цифры расположенной после цифры 1 в числе 1 428 571 428 57 14…, то есть периодом будет 428 571; это же число, очевидно, должно быть и произведением числа 142 857 на 3, так как $\frac{3}{7}=\frac{1}{7}\cdot 3$.

Далее, при обращение дроби $\frac{2}{7}$ в десятичную период начнется с цифры, расположенной после цифр 1 и 4 в числе 14 285 714 285 714…, то есть периодом будет 285 714; это же число, очевидно, должно быть и произведением 142 857 на 2, так как $\frac{2}{7}=\frac{1}{7}\cdot 2$ и т.д.

Также нетрудно уяснить, почему произведение числа 142 857 на 7 состоит из одних девяток. Дело в том, что десятичная дробь с бесконечно повторяющимися девятками после запятой считается равной 1, то есть 1= 0,9999…, и произведение дроби $\frac{1}{7}$ на 7 тоже равно 1.

Если дробь $\frac{a}{b}$ обращается в периодическую, то период ее может иметь не больше чем b – 1 цифр.

В самом деле, при делении остаток всегда должен быть меньше делителя, но существует только конечное число целых числе, меньших b, а именно 1,2,3,…, b – 1.

Каждое из этих чисел может быть остатком при делении a на b, и каждому из них соответствует какая-либо цифра частного. Дальше возможно только повторение остатков, а значит, и повторение цифр частного. Отсюда и следует, что наибольшее возможное число цифр в периоде на 1 меньше знаменателя.

В дроби $\frac{1}{7}$ достигнута именно эта максимальная длина периода (6 цифр).

Период называется *полным,* если он состоит из наибольшего возможного при данном знаменателе числа цифр.

Но не всякая дробь имеет полный период.

Например, период дроби $\frac{1}{39}$ содержит не 38 цифр, а только 6:

$$\frac{1}{39}=0{,}025641025641\ldots$$

«Круговое» свойство числа 142 857, являющегося полным периодом дроби $\frac{1}{7}$, присуще также периоду любой другой периодической дроби, если только ее период полный.

Периоды дробей $\frac{1}{17}$ и $\frac{1}{29}$ полные:

$$\frac{1}{17}=0{,}(0588235294117647),$$

$$\frac{1}{29}=0{,}(0344827586206896551724137931).$$

В первом – 16 цифр, во втором – 28. Числа, образованные цифрами эти периодов, следовательно, обладают теми же свойствами, что и число 142 857.

Одержано 28.04.10

М.І.Півень, доц., канд. пед. наук

Кіровоградський національний технічний університет